Pelabelan Total Super (a, d)-sisi Antimagic pada Graf Semi Parasut SP_{2n-1}

Karinda Rizqy Aprilia[1,2], Ika Hesti A[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
karinda@gmail.com Hestyarin@gmail.com
[3]Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$. Suatu pemetaan bijeksi g dari $V(G) \cup E(G)$ ke {1,2,...,$|V(G)|$+$|E(G)|$} dikatakan pelabelan total $(a, d)-$sisi antimagic di G, jika himpunan bobot sisi $W(x, y) = \{w(xy)|w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy)\}$, $\forall$ $xy \in E(G)$ dapat dinyatakan sebagai barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d. Pelabelan total (a, d)-sisi antimagic dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi antimagic super jika $g(V(G)) = \{1, 2, ..., |V(G)|\}$. Pada makalah ini akan dikaji kembali tentang pelabelan total (a, d)- sisi antimagic pada graf semi parasut SP_{2n-1} dengan $n \geq 2$.

Key Words : *pelabelan total* (a, d)- *sisi antimagic, graf semi parasut.*

Pendahuluan

Graf adalah salah salah kajian dalam matematika diskrit. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label [5]. Secara umum, pelabelan adalah pemetaan satu-satu (bijektif) yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label, sehingga semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positiv yang berbeda. Jika domain dari pemetaan adalah titik maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domain adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) dan jika domainnya adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*)[11][8]. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Jika dijumlahkan dua titik dengan label sisinya menghasilkan suatu bobot yang sama disebut graf dengan pelabelan *magic* dan jika berbeda maka disebut *antimagic* dengan semua bobot membentuk bilangan aritmatika $\{a, a + d, a + (q - 1)d\}$ [6][9].

Beberapa penelitian sejenis yang telah dipublikasikan antara lain ditemukan oleh Dafik [1], [2], [3], [4].

Pada makalah ini penulis mengkaji kembali tentang pelabelan total (a, d)-sisi antimagic pada graf semi parasut SP_{2n-1} dengan $n \geq 2$.

Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic

Sebuah pelabelan disebut pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, ..., p+q\}$ merupakan himpunan titik dan himpunan label sisi yang apabila dijumlahkan dua titik dengan label sisinya menghasilkan suatu bobot W dengan nilai terkecil a dan beda d. Sehingga pada semua sisi graf G himpunan bobotnya adalah $W = w(xy) \mid xy \in E(G) = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$. Dikatakan super apabila pelabelan terkecilnya terdapat pada semua titiknya [7][10][12].

Lemma 1 *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Bukti: $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, p+3, ..., p+q\}$. Misalkan graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \bigcup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3..., p+q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $w(u) + w(uv) + w(v) = 1 + (p+1) + 2 = p+4$ dan dapat ditulis $p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p-1) + (p+q) + p = 3p + q - 1$. Akibatnya:

$$\begin{aligned} a + (q-1)d &\leq 3p + q - 1 \\ d &\leq \frac{3p + q - 1 - (p+4)}{q-1} \\ d &\leq \frac{2p + q - 5}{q-1} \end{aligned}$$

Dari Lemma 1 telah terbukti dan diperoleh nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf [13]. □

Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Semi Parasut SP_{2n-1}

Graf semi parasut dinotasikan SP_{2n-1} adalah sebuah graf yang memiliki himpunan *vertex*, $V = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n-1\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa graf semi parasut mempunyai pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan batasan $d \in \{0, 1, 2\}$ berdasarkan Lemma 1.

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p+q-5}{q-1} \\ &= \frac{2(2n)+(3n-1)-5}{(3n-1)-1} \\ &= \frac{4n+3n-6}{3n-2} \\ &= \frac{7n-6}{3n-2} \\ &= 2+\frac{n-2}{3n-2} \end{aligned}$$

Karena pelabelan selalu menggunakan bilangan bulat positif maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2\}$.

◇ **Lemma 1** *Ada pelabelan* $(3, 1)$*-sisi antimagic titik pada graf semi parasut* SP_{2n-1} *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ dengan fungsi bijektif α_1 yang didefinisikan sebagai $\alpha_1 : V(SP_{2n-1}) \to \{1, 2, \ldots, 3n-1\}$, maka pelabelan α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_1(z) &= 1 \\ \alpha_1(x_i) &= i+1, \quad 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(y_i) &= n+i+1, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Pelabelan titik diatas adalah fungsi bijektif dari $\alpha_1 \;\; V(G) \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Misal bobot sisi SP_{2n-1} berdasarkan α_1 adalah w_{α_1}, dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka w_{α_1} dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1}(zx_i) &= i+2, && 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}(x_1x_n) &= n+3 && \\ w_{\alpha_1}(x_iy_i) &= n+2i+2, && 1 \leq i \leq n-1 \\ w_{\alpha_1}(y_ix_{i+1}) &= n+2i+3, && 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi pada pelabelan titik sisi antimagic, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_1}(zx_i)$ yaitu $i+2$ untuk $i = 1$. Sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\alpha_1}(y_ix_{i+1})$ yaitu $n+2i+3$ untuk $i = n-1$. Dengan mensubsitusikan fungsi yang bergerak $1 \leq i \leq n$ maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $\bigcup_{k=1}^{4} w_{\alpha_1} = \{3, 4, 5, \ldots, 3n+1\}$. Sehingga, terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ memiliki pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antimagic. □

Berdasarkan Lemma 1 maka diperoleh pelabelan titik $(3, 1)$-sisi antimagic, selanjutnya akan disajikan pelabelan total super sisi antimagic dengan nilai awal a dan nilai beda $d = 0$ atau ditulis sebagai pelabelan total super $(a, 0)$-sisi antimagic.

◇ **Teorema 1** *Ada pelabelan super* $(5n + 2, 0)$*-sisi antimagic total graf semi parasut* SP_{2n-1} *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} untuk $n \geq 2$ dengan fungsi bijektif $\alpha_2 = \alpha_1$, kemudian labeli sisinya sedemikian hingga label sisi α_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$-sisi antimagic pada graf SP_{2n-1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll}
\alpha_2(y_i x_{i+1}) & = & 4n - 2i - 1, & 1 \leq i \leq n-1 \\
\alpha_2(x_i y_i) & = & 4n - 2i, & 1 \leq i \leq n-1 \\
\alpha_2(x_1 x_n) & = & 4n - 1 & \\
\alpha_2(z x_i) & = & 5n - i, & 1 \leq i \leq n
\end{array}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa pelabelan titik diatas adalah fungsi bijektif dari $f_1 \;\; V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 5n-1\}$. Misal bobot total didefinisikan sebagai W_{α_2}, maka berdasarkan penjumlahan bobot sisi w_{α_1} yang terdapat pada lemma 1 dengan label sisi α_2 yang bersesuaian maka diperoleh W_{α_2} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W^1_{\alpha_2}(y_i x_{i+1}) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(y_i x_{i+1})\} \\
&= (n + 2i + 3) + (4n - 2i - 1) \\
&= 5n + 2 \\
W^2_{\alpha_2}(x_i y_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(x_i y_i)\} \\
&= (n + 2i + 2) + (4n - 2i) \\
&= 5n + 2 \\
W^3_{\alpha_2}(x_1 x_n) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(x_1 x_n)\} \\
&= (n + 3) + (4n - 1) \\
&= 5n + 2 \\
W^4_{\alpha_2}(z x_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_2(z x_i)\} \\
&= (i + 2) + (5n - i) \\
&= 5n + 2
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa $\bigcup_{k=1}^{4} W^k_{\alpha_2} = \{5n + 2, 5n + 2, \ldots, 5n + 2\}$. Sehingga terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} dengan $n \geq 2$ mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = 5n + 2$ dan $d = 0$. Bilangan 1, 2, ..., 4 pada $W^1_{\alpha_2}, W^2_{\alpha_2}, \ldots, W^4_{\alpha_2}$ bukan merupakan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot sisi W_{α_2} untuk tiap sisi yang berlainan. □

◇ **Teorema 2** *Ada pelabelan super* $(2n+4, 2)$*-sisi antimagic total pada graf semi parasut* SP_{2n-1} *untuk* $n \geq 2$*.*

Bukti. Labeli titik graf semi parasut SP_{2n-1} dengan fungsi bijektif $\alpha_3 = \alpha_1$, kemudian definisikan label sisi α_3 untuk pelabelan total super $(a, 2)$-sisi antimagic sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_3(z x_i) &= 2n + i, && 1 \leq i \leq n \\
\alpha_3(x_1 x_n) &= 3n + 1 \\
\alpha_3(x_i y_i) &= 3n + 2i, && 1 \leq i \leq n - 1 \\
\alpha_3(y_i x_{i+1}) &= 3n + 2i + 1, && 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot total, maka berdasarkan penjumlahan bobot sisi w_{α_1} yang terdapat pada lemma 1 dengan label sisi α_3 yang bersesuaian diperoleh W_{α_3} untuk nilai $d = 2$ dengan syarat batas i, sehingga diperoleh W_{α_3} sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W^1_{\alpha_3}(zx_i) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_3(zx_i)\} \\
&= (i+2) + (2n+i) \\
&= 2n + 2i + 2 \\
W^2_{\alpha_3}(x_1x_n) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_3(x_1x_n)\} \\
&= (n+3) + (3n+1) \\
&= 4n + 4 \\
W^3_{\alpha_3}(x_iy_i) &= \{w_{\alpha_1}(x_iy_i) + \alpha_3(x_iy_i)\} \\
&= (n+2i+2) + (3n+2i) \\
&= 4n + 4i + 2 \\
W^4_{\alpha_3}(y_ix_{i+1}) &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_3(y_ix_{i+1})\} \\
&= (n+2i+3) + (3n+2i+1) \\
&= 4n + 4i + 4
\end{aligned}
$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi W_{α_3}, dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil terdefinisikan oleh $W^1_{\alpha_3}(zx_i)$ untuk $i = 1$ dengan nilai $2n + 4$ dan bobot sisi terbesar terdefinisikan oleh $W^4_{\alpha_3}(y_ix_{i+1})$ dengan nilai $8n$ untuk $i = n - 1$. Sehingga kita dapat menentukan bobot sisi terbesar dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 2n + 4$ dimana i=1 dan nilai $b = 2$ ke persamaan $U_n = a + (n - 1)b = 2n + 4 + (3n - 1 - 1)2$, didapatkan $U_n = 8n$. Terlihat bobot sisi terbesar terletak pada $W^4_{\alpha_3}(y_ix_{i+1}) = 8n$ untuk $i = n - 1$. Dan didapatkan himpunan $\bigcup_{r=1}^{4} W^r_{\alpha_3}$ = {2n+4, 2n+6, ..., 8n}. Dapat dinyatakan bahwa W_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $2n + 4$ dan beda 2. Sehingga terbukti bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} mempunyai Pelabelan Total Super $(2n + 4, 2)$-Sisi Antimagic. □

Kesimpulan

Pada penelitian ini ditunjukkan bahwa graf semi parasut SP_{2n-1} dengan $n \geq 2$ mempunyai pelabelan $(3, 1)$-sisi antimagic titik serta pelabelan super (a, d)-sisi antimagic total yaitu pelabelan super $(5n + 2, 0)$-sisi antimagic total dan pelabelan super $(2n + 4, 2)$-sisi antimagic total.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc dan M.Ziaul Arif, S.Si, M.Sc yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

References

[1] Dafik, Slamin, Fuad and Riris. 2009. *Super Edge-antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Triangular Ladder and Lobster Graphs.*Yogyakarta: Proceeding of IndoMS International Conference of Mathematics and Applications (IICMA) 2009.

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combinatoria* , **101** (2011), 97-107

[3] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[5] H. Enomoto, A.S. Lladó, T. Nakamigawa and G. Ringel, Super edge-magic graphs, *SUT J. Math.* **34** (1998), 105–109.

[6] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelings among ather classes of labelings, Discrete Mathematics, **231** (2001), 153-168.

[7] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, *Discrete Math.* **231** (2001), 153–168.

[8] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, On super edge-magic graph, Ars Combin. 64 (2002), 81–95.

[9] N. Hartsfield and G. Ringel, Pearls in Graph Theory, Academic Press, Boston - San Diego - New York - London, 1990.

[10] A. Kotzig and A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, *Canad. Math. Bull.* **13** (1970), 451–461.

[11] G. Ringel and A.S. Lladó, Another tree conjecture, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **18** (1996), 83–85.

[12] R. Simanjuntak, F. Bertault and M. Miller, Two new (a, d)-antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms* (2000), 179–189.

[13] K.A. Sugeng, M. Miller and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings, *Utilitas Math.*, **71** (2006) 131-141.